



کران یابی مسئله Freeze-Tag

در فضاها ی متریک مختلف

دانشجو: سروش صحرایی (۸۱۰۱۰۱۵۷۰)

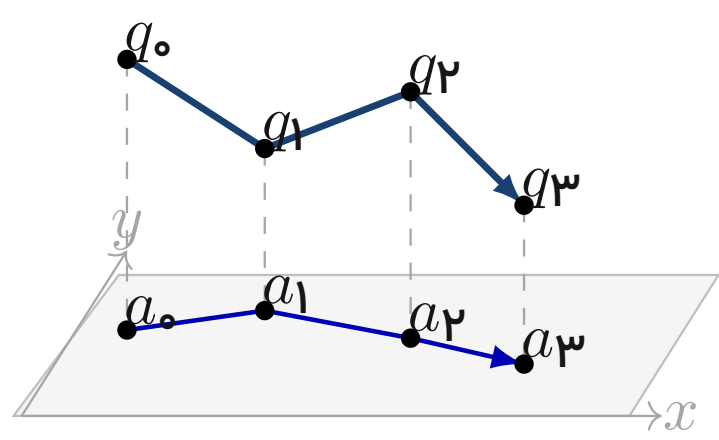
استاد راهنما: دکتر هشام فیلی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تهران - تیر ۱۴۰۵

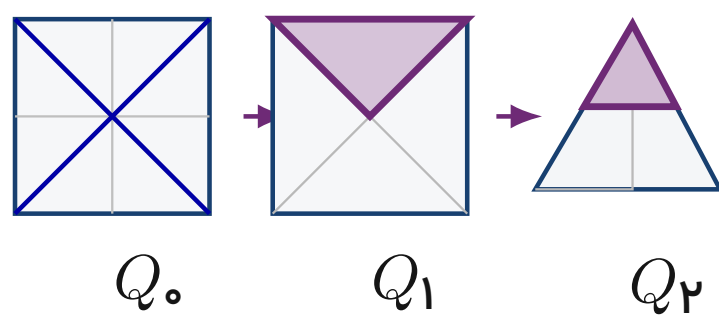
فضای اقلیدسی ۳ بعدی

۳. فضای اقلیدسی $(\mathbb{R}^3, \ell_2)$

طول هر مسیر ریشه‌تایرگ به یک حرکت عمودی و تصویر آن روی صفحه $z=0$ تجزیه می‌شود.



$z=0$ روی تصویر



- کران $12/76$: دومین یال‌ها $4 \sin \frac{3\pi}{8} \leq$ ؛ بقیه سری هندسی $2\sqrt{2} + \sqrt{5} \Rightarrow$ کل $12/7601 \leq$.
- نگاشت نیم‌کره $\rightarrow$ دیسک: $(\delta, \theta) \mapsto (\delta, \theta)$ روی دیسک شعاع $\pi/2$. برای هر p_1, p_2 : $\|p_1 - p_2\|_2 \leq \|\mathcal{M}(p_1) - \mathcal{M}(p_2)\|_2$.
- نمونه‌های مرزی: کران تاجی $4/073 < \mathcal{R}(\pi/2, \pi) \Rightarrow$ کل $9/4 <$.
- Surface-FTP: فاصله ژئودزیک، شبیه‌سازی شبکه با $\epsilon = 0/001 \Rightarrow$ کران $9/92$.

مقدمه و مسئله

مسئله Freeze-Tag با ازدحامی از ربات‌های خفته آغاز می‌شود که تنها یکی بیدار است. هر ربات بیدار با سرعت واحد حرکت می‌کند و هر رباتی را که به آن برسد بیدار می‌کند تا به تیم بپیوندد. هدف، کمینه‌کردن Makespan است: زمان بیدارشدن آخرین ربات.

برنامه بیدارسازی با درخت ریشه‌دار T نمایش داده می‌شود که وزن هر یال آن فاصله متریک دو سر آن است؛ Makespan برابر بیشینه طول مسیر ریشه تا برگ است. FTP در $(\mathbb{R}^3, \ell_p)$ و $(\mathbb{R}^2, \ell_2)$ NP-hard است، پس این پروژه در پی کران‌های صریح و اثبات‌پذیر روی نسبت بیدارسازی گوی واحد است.

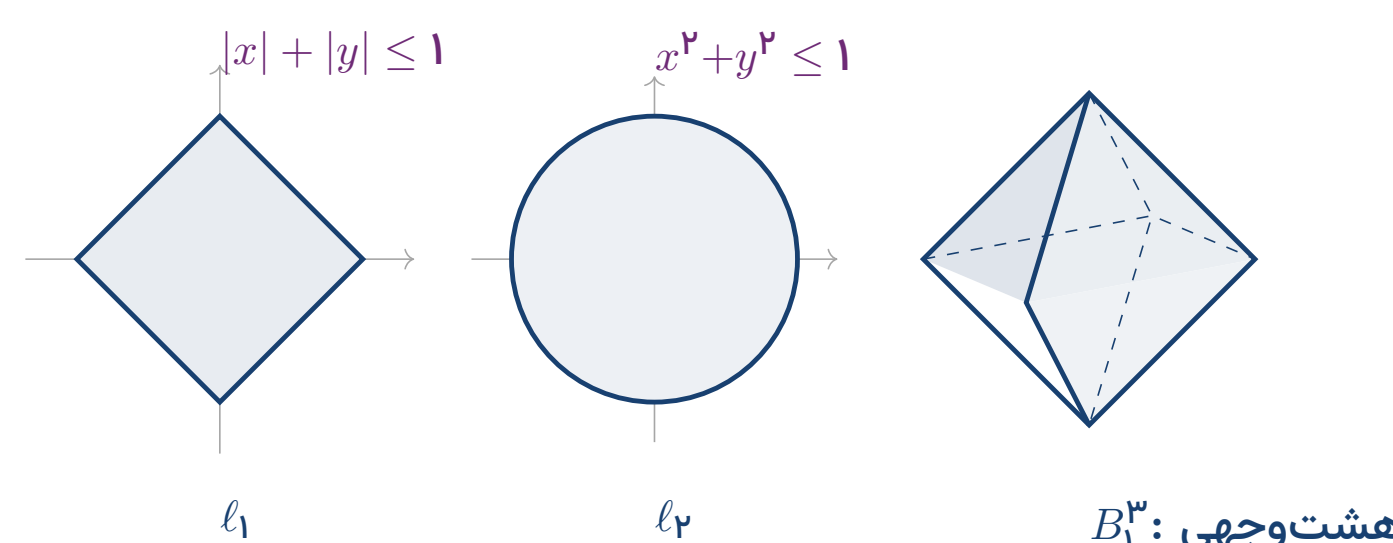
سه مسیر این پروژه:

- منهتنی ۳ بعدی: هندسه هشت‌وجهی گوی ℓ_1 و پوششی ۱۸ ناحیه‌ای.
- اقلیدسی ۳ بعدی: تقسیم‌بندی مثلثی و نگاشت نیم‌کره به دیسک.
- ابعاد بالا: کاهش وابستگی از فوق‌نمایی به $O(d \log d)$.

فضای منهتنی ۳ بعدی

۱. فضای منهتنی $(\mathbb{R}^3, \ell_1)$

گوی واحد $B_1 = \{|x|+|y|+|z| \leq 1\}$ یک هشت‌وجهی است، و هر سه راهبرد این بخش از پوشاندن آن با گوی‌های کوچک‌تر بهره می‌گیرند.



کران ۱۳ [AAMAS 2025]

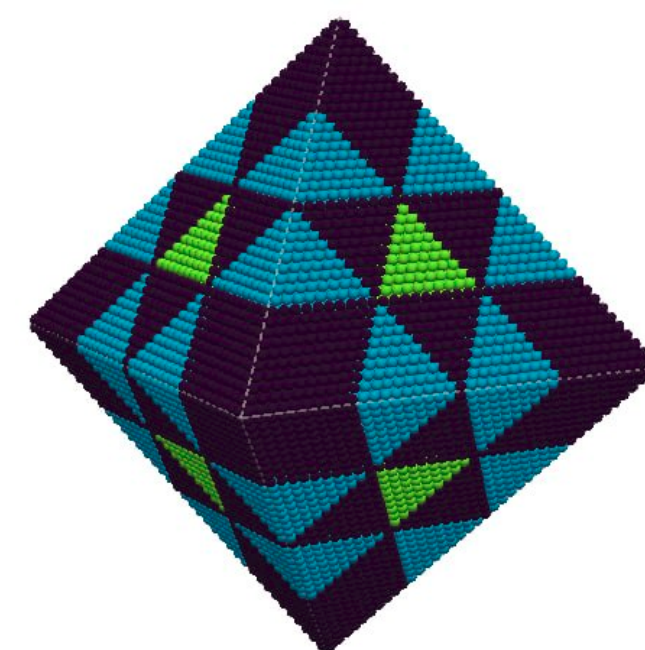
- $n \leq 127$: شش دور دوبرابرشدن $128=2^7 \Rightarrow$ فعال؛ زمان $13r = r + 6(2r)$.
- $n > 127$: پوشش ۶ تایی هر گوی با ۶ گوی شعاع $\frac{2r}{3} \Rightarrow$ بازگشت $f(D) \leq \frac{13D}{6} + f(\frac{2D}{3})$.

کران پایین $5 + \frac{2}{3}$. ۸ ربات روی مرز هشت‌وجهی: $v_1=(0,0,1), \dots, v_7=(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. هر مسیر ریشه‌تایرگ $5 + \frac{2}{3} = 1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 2 \geq$.

پوشش ۱۸ ناحیه‌ای $\Rightarrow$ کران ۱۰ [CCCG 2026]

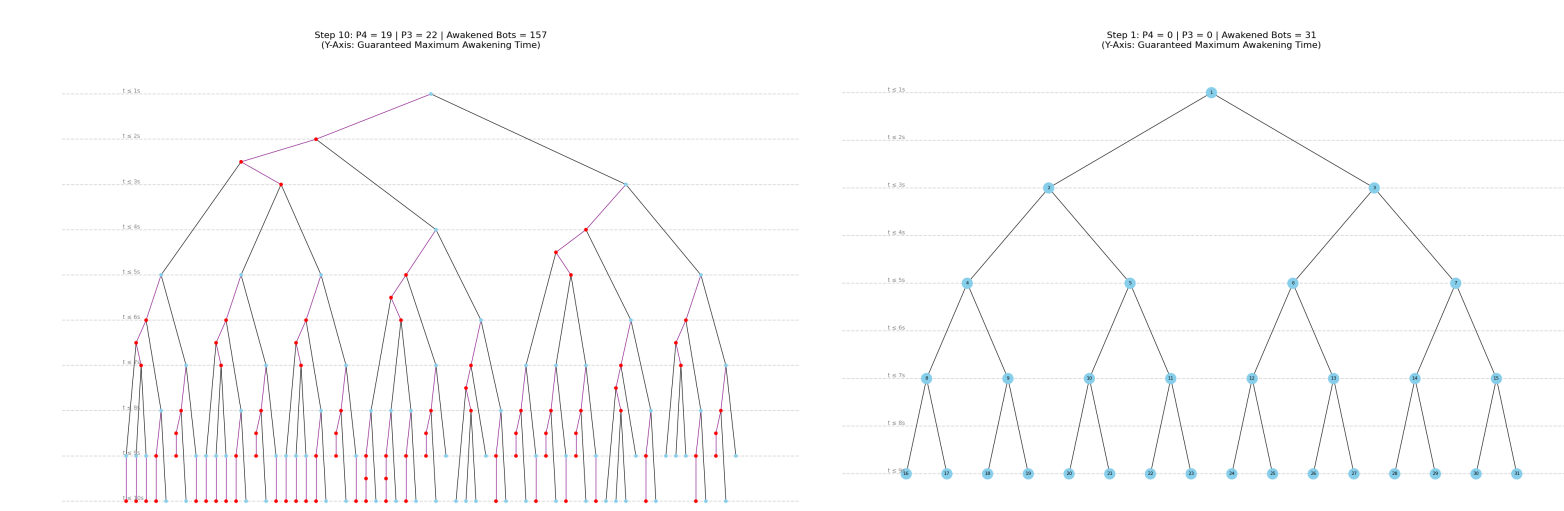
- ۱۸ مرکز در $(\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{3}, 0), \dots, (\pm \frac{1}{3}, 0, 0), \dots$ گوی را با گوی‌های شعاع $\frac{1}{3}$ می‌پوشانند.

• $n \geq 158$: اصل لانه‌کبوتری $\Rightarrow$ یک ناحیه $9 \geq$ ربات دارد $\Rightarrow$ تیم ۸ تایی + لم هرمی $f(x, h) \leq 9x + h \Rightarrow$ زمان کل $10 = 5/5 + 5/5 + 4$.



پوشش ۱۸ ناحیه‌ای گوی واحد ℓ_1 ؛ رنگ = تعداد هم‌پوشانی.

حالت پایه ($n \leq 157$): برای رباتهای کمتر از آستانه پوششی، صف اولویت با زنجیره‌های یکنواخت P_2, P_3 شبیه‌سازی شد (قضیه Erdős–Szekeres)؛ گام‌های ۱ تا ۱۰ این شبیه‌سازی از ۳۱ تا ۱۵۷ ربات را پوشش می‌دهند.



گام ۱ (۳۱ ربات) و گام ۱۰ (۱۵۷ ربات) — Makespan ≤ 10 .

ابعاد بالا

۲. ابعاد بالا

در ابعاد بالا، پوشش شبکه‌ای را با هندسه رأس‌های cross-polytope جایگزین می‌کنیم.

$r^{\frac{d-1}{d}}$ پوشیده می‌شود؛ زمان تولید $2d$ منبع فعال $r + 2r \lceil \log_2 d \rceil$ است، و بازگشت $f_d(r) \leq C_d r +$ با $f_d(\frac{d-1}{d}r) = O(d \log d)$ کران $C_d = 1 + 2 \lceil \log_2 d \rceil + \frac{d+1}{d}$ می‌دهد.

نسخه خطی $O(d)$. پوشش حجمی با شعاع $r/2$ ، تعداد پوشش $5^d \leq \Rightarrow$ دورها $d \log 5 = O(d)$.

کران پایین. رئوس ابرمکعب نرمال، فاصله دوبه‌دو $2/\sqrt{k} \geq 1 + 2\sqrt{k} \geq T \Rightarrow$.

نتایج کلیدی

فضا / حالت	کران بالا	کران پایین
$(\mathbb{R}^3, \ell_1)$ - کلی	۱۰	$5 + \frac{2}{3}$
$n \leq 127 - (\mathbb{R}^3, \ell_1)$	۱۳	—
$(\mathbb{R}^3, \ell_2)$ - کلی	$12/76$	—
نمونه‌های مرزی ℓ_2	$9/4$	—
Surface-FTP (ژئودزیک)	$9/92$	—
$(\mathbb{R}^d, \ell_1)$ - پوششی	$O(d \log d)$	—
$(\mathbb{R}^d, \ell_1)$ - حجمی	$O(d)$	—
$(\mathbb{R}^k, \ell_2)$ - کران پایین	—	$1 + 2\sqrt{k}$

اعتبارسنجی. این کران‌ها با سه روش مستقل بررسی شدند: شبیه‌سازی erdos_szekeres_tree_gen.py با زنجیره‌های P_2/P_3 تا ۱۵۷ ربات، بررسی نامساوی ژئودزیک روی شبکه $(\delta_1, \delta_2, \theta)$ با $\epsilon=0/001$ ، و پوشش جامع تمام درخت‌های بیدارسازی رأسی برای کران پایین.

جمع‌بندی

کران بالای منهتنی سه‌بعدی از ۱۳ به ۱۰ رسید (AAMAS 2025, CCCG 2026)؛ همراه با کران اقلیدسی $12/76$ ، مرزی $9/4$ ، سطحی $9/92$ و $O(d \log d) \rightarrow O(d)$ در ابعاد بالا. ادامه کار: شکاف $5 - 10$ و کران صریح در $(\mathbb{R}^d, \ell_2)$.

مراجع اصلی

1. Arkin et al. — Algorithmica 46, 2006.
2. Alipour et al. — AAMAS, 2025.
3. Alipour et al. — JAAMAS 40(1), 2026.

4. Alipour, Sahraei et al. — CCCG 2026.
5. Bonichon et al. — DISC 2024.
6. Pedrosa, Silva — Procedia CS 223, 2023.