

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

کرانیابی مسئله Freeze-Tag در فضاها متریک مختلف

Bounding the Freeze-Tag Problem in Various Metric Spaces

نگارش:

سروش صحرایی (۸۱۰۱۰۱۵۷۰)

استاد راهنما:

دکتر هشام فیلی

استاد داور:

دکتر جواد دوستی

تیر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۱	مقدمه و مدل رسمی	1
۱	1.1 تعریف مسئله و منطق زمانی	1
۱	1.2 جایگاه نتایج	1
۳	2 فضای منهتنی سه بعدی	2
۳	2.1 کران ۱۳ و ساختار پایه	3
۴	2.2 کران پایین $2/3 + 5$	4
۵	2.3 پوشش ۱۸ ناحیه‌ای و کران ۱۰	5
۷	2.4 حالت پایه و شبیه‌سازی Erdős-Szekeres	7
۱۲	3 فضای اقلیدسی و نگاشت سطحی	3
۱۲	3.1 تقسیم‌بندی مثلثی و کران $12/7601$	12
۱۳	3.2 نگاشت نیم‌کره به دیسک	13
۱۴	3.3 نمونه‌های مرزی و سطحی	14
۱۶	4 ابعاد بالا	4
۱۶	4.1 اثبات $O(d \log d)$ با پوشش $2d$ تایی	16
۱۸	4.2 نسخه خطی $O(d)$	18
۱۸	4.3 کران پایین اقلیدسی در ابعاد بالا	18
۱۹	5 جمع‌بندی	19

چکیده

مسئله Freeze-Tag مدلی برای فعال‌سازی سریع یک مجموعه از ربات‌های غیرفعال است. در ابتدا یک ربات فعال وجود دارد و هر ربات فعال با سرعت واحد حرکت می‌کند؛ به محض رسیدن به محل یک ربات غیرفعال، آن ربات نیز فعال می‌شود و می‌تواند در ادامه فرایند مشارکت کند. معیار اصلی، زمان فعال شدن آخرین ربات یا Makespan است.

این گزارش چند کران هندسی برای FTP را در فضاهای منهتنی و اقلیدسی بررسی می‌کند. در فضای $(\mathbb{R}^3, \ell_1)$ ابتدا نخستین کران بالای صریح ادبیات، یعنی ۱۳، به دست آمد و در AAMAS 2025 منتشر شد. سپس برای همین فضا یک کران پایین $2/3 + 5$ و یک راهبرد پوشش ۱۸ ناحیه‌ای برای کران ۱۰ تحلیل می‌شود. در بخش اقلیدسی، کران $12/7601$ برای $(\mathbb{R}^3, \ell_2)$ ، نگاشت نمونه‌های مرزی به دیسک دوبعدی، و کران‌های $9/4$ و $9/92$ برای نمونه‌های مرزی و surface-FTP ارائه می‌شوند. در نهایت، وابستگی کران‌های منهتنی در ابعاد بالا از حالت فوق‌نمایی به $\mathcal{O}(d \log d)$ کاهش داده می‌شود و نسخه بهینه‌شده خطی $\mathcal{O}(d)$ نیز در چارچوب نتایج بعدی توضیح داده می‌شود.

در این پروژه، نخستین کران ۱۳ برای $(\mathbb{R}^3, \ell_1)$ ، بخش اصلی تحلیل‌های اقلیدسی و نگاشت مرزی، اعتبارسنجی شبیه‌سازی ژئودزیک، تولیدکننده و بررسی‌کننده کران پایین $2/3 + 5$ ، ایده پوشش ۱۸ ناحیه‌ای، شبیه‌سازی حالت پایه، و اثبات اولیه $\mathcal{O}(d \log d)$ در ابعاد بالا توسعه یافت.

فصل 1

مقدمه و مدل رسمی

1.1 تعریف مسئله و منطق زمانی

فرض کنید $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ مجموعه ربات‌های غیرفعال در یک فضای متریک (M, δ) باشد و ربات اولیه در نقطه p_* فعال باشد. هر ربات فعال با سرعت واحد حرکت می‌کند. اگر رباتی در زمان t فعال شود و مقصد بعدی او نقطه q باشد، آنگاه در زمان دقیق

$$t + \delta(p, q)$$

به q می‌رسد و اگر در q رباتی غیرفعال وجود داشته باشد، آن ربات در همان لحظه فعال می‌شود. به طور خاص، اگر فاصله مقصد برابر ۱ باشد، ربات فعال‌شده در زمان d در زمان $d + 1$ به مقصد می‌رسد.

تعریف 1.1 (درخت بیدارسازی). یک برنامه بیدارسازی را می‌توان به صورت درخت ریشه‌دار T نمایش داد. ریشه p_* است و هر یال (u, v) به معنی آن است که ربات فعال در u برای فعال کردن ربات v حرکت می‌کند. وزن یال برابر $\delta(u, v)$ است و زمان فعال شدن هر رأس، طول مسیر وزندار از ریشه تا آن رأس است. $Makespan$ برابر بیشینه این طول‌ها است:

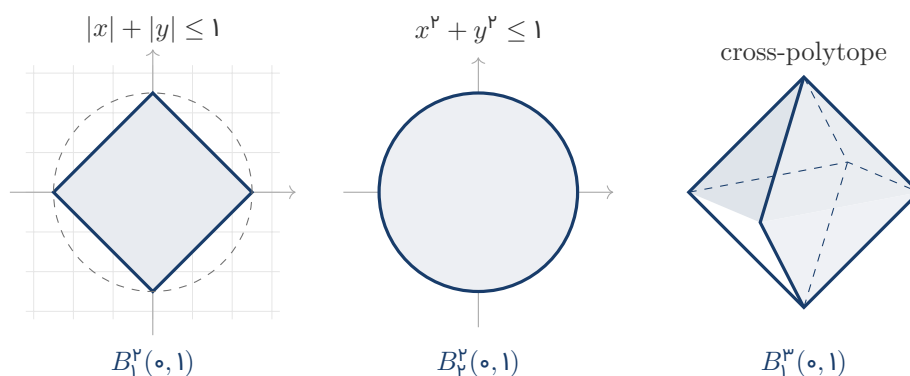
$$ms(T) = \max_{v \in P} \sum_{e \in path(p_*, v)} w(e).$$

برای گوی واحد یک فضای متریک، نسبت بیدارسازی بیشینه $Makespan$ بهینه روی همه پیکربندی‌های متناهی داخل گوی است. اگر این نسبت برای گوی واحد برابر c باشد، هر نمونه‌ای با شعاع r با مقیاس‌گذاری در زمان حداکثر cr حل می‌شود؛ زیرا r خود یک کران پایین بدیهی برای $Makespan$ است.

1.2 جایگاه نتایج

مسئله FTP در حالت‌های مختلف سخت است؛ برای نمونه، در $(\mathbb{R}^3, \ell_p)$ برای $p \geq 1$ و در $(\mathbb{R}^2, \ell_2)$ NP-hard شناخته شده است [۱، ۵، ۶]. از این رو، تمرکز این گزارش روی کران‌های صریح و قابل اثبات برای حالت‌های هندسی است.

سه مسیر فنی دنبال می‌شود. نخست، در فضای منتهی سه‌بعدی، از ساختار هشت‌وجهی گوی ℓ_1 برای کران‌های 1^3 و 1^0 و کران پایین $2/3 + 5$ استفاده می‌شود. دوم، در فضای اقلیدسی، تقسیم‌بندی مثلثی و نگاشت سطحی ابزار اصلی هستند. سوم، در ابعاد بالا، مسئله پوشش گوی ℓ_1 و رشد نمایی تعداد ربات‌های فعال به یک استقرار صریح منتهی می‌شود.



شکل 1.1: تفاوت هندسی گوی‌های واحد در نرم‌های ℓ_1 و ℓ_2 . در سه‌بعد، گوی ℓ_1 همان هشت‌وجهی منتظم است و بیشتر کران‌های این گزارش بر پوشش همین جسم تکیه دارند.

فصل 2

فضای منهتی سه بعدی

2.1 کران ۱۳ و ساختار پایه

گوی واحد در $(\mathbb{R}^3, \ell_1)$ برابر است با

$$B_1(\circ, 1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| \leq 1\}.$$

این گوی یک Cross-polytope سه بعدی است. در مقاله AAMAS 2025 نخستین کران بالای صریح برای این فضا ارائه شد [۲].

لم 2.1 (حالت کوچک کران ۱۳). اگر همه ربات‌ها در $B_1(\circ, r)$ باشند و تعداد ربات‌های غیرفعال حداکثر ۱۲۷ باشد، ربات مرکزی می‌تواند همه را در زمان $13r$ فعال کند.

اثبات. ربات اولیه در زمان حداکثر r اولین ربات را فعال می‌کند. پس از آن، هر ربات فعال می‌تواند در زمان حداکثر قطر گوی، یعنی $2r$ ، یک ربات دیگر را فعال کند. پس از k دور دوبرابر شدن، تعداد ربات‌های فعال حداقل 2^{k+1} است. با $k = 6$ داریم $2^7 = 128$ ربات فعال، و زمان کل برابر است با

$$r + 6(2r) = 13r.$$

□

لم 2.2 (پوشش شش‌تایی برای بازگشت کران ۱۳). هر گوی ℓ_1 با شعاع r را می‌توان با شش گوی ℓ_1 با شعاع $\frac{2r}{3}$ پوشاند.

اثبات. مراکز شش گوی کوچک را در نقاط

$$(\pm r/3, \circ, \circ), \quad (\circ, \pm r/3, \circ), \quad (\circ, \circ, \pm r/3)$$

قرار می‌دهیم. برای هر $p = (x, y, z)$ با $|x| + |y| + |z| \leq r$ ، مختصه‌ای با بیشترین قدرمطلق را انتخاب می‌کنیم. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $|x| \geq |y|, |z|$ و $x \geq 0$. اگر $x \leq r/3$ ، آنگاه

$$\|p - (r/3, 0, 0)\|_1 = r/3 - x + |y| + |z| \leq r/3 - x + 2x \leq 2r/3.$$

اگر $x > r/3$ ، آنگاه

$$\|p - (r/3, 0, 0)\|_1 = x - r/3 + |y| + |z| \leq x - r/3 + r - x = 2r/3.$$

حالت $x = 0$ و سایر مختصات با تقارن مشابه است. $\square$

این دو لم، همراه با بیدار کردن هفت ربات در زمان $3r$ ، کران 13 را نتیجه می‌دهند. برای نوشتن بازگشت، قطر گوی را $D = 2r$ بگیرد و $f(D)$ را بدترین زمان لازم برای بیدارسازی همه ربات‌ها در یک گوی با قطر D تعریف کنید. اگر $n > 127$ باشد، ابتدا هفت ربات در زمان

$$3r = \frac{3D}{2}$$

فعال می‌شوند. سپس شش ربات به مراکز شش زیرگوی پوشاننده فرستاده می‌شوند. شعاع هر زیرگوی $\frac{2r}{3}$ و قطر آن $\frac{2D}{3}$ است، و هزینه رسیدن به مرکز مناسب حداکثر

$$\frac{2D}{3}$$

است. بنابراین

$$f(D) \leq \frac{3D}{2} + \frac{2D}{3} + f\left(\frac{2D}{3}\right) = \frac{13D}{6} + f\left(\frac{2D}{3}\right).$$

با باز کردن سری هندسی داریم

$$f(D) \leq \frac{13D}{6} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{13D}{2}.$$

برای گوی واحد ℓ_1 ، قطر $D = 2$ است؛ پس $f(2) \leq 13$. این کران نخستین نقطه شروع برای بهبودهای بعدی به 12 و سپس راهبرد 10 بود.

2.2 کران پایین $2/3 + 5$

پیکربندی زیر روی مرز $B_1(0, 1)$ تعریف می‌شود:

$$v_1 = (0, 0, 1), \quad v_2 = (0, 0, -1),$$

$$v_3 = (0, 1, 0), \quad v_4 = (0, -1, 0),$$

$$v_5 = (1, 0, 0), \quad v_6 = (-1, 0, 0),$$

$$v_7 = (1/3, 1/3, 1/3), \quad v_8 = (-1/3, -1/3, -1/3).$$

ربات اولیه در مبدأ قرار دارد.

لم 2.3. هر برنامه بیدارسازی برای مجموعه $\{v_1, \dots, v_8\}$ در $Makespan(\mathbb{R}^3, \ell_1)$ حداقل $5 + 2/3$ دارد.

اثبات. فاصله مبدأ تا هر v_i برابر ۱ است. فاصله میان دو نقطه محوری متمایز برابر ۲ است، فاصله v_7 و v_8 نیز ۲ است، و برای نقاط قطری داریم

$$\|a - v_v\|_1 = \begin{cases} 4/3 & a \in \{v_1, v_3, v_5\}, \\ 2 & a \in \{v_2, v_4, v_6\}, \end{cases}$$

و رابطه متناظر برای v_8 با جهت‌های منفی برقرار است.

درخت بیدارسازی شامل ۹ رأس است. یک درخت دودویی با عمق ۳ حداکثر $1 + 2 + 4 + 8$ رأس در سطح‌ها دارد، اما برای فعال کردن ۸ ربات غیرفعال، در مسیر ریشه تا یک برگ دست‌کم چهار یال لازم می‌شود. یال اول از مبدأ وزن ۱ دارد. در میان سه یال بعدی، حداکثر دو یال می‌توانند وزن $4/3$ داشته باشند؛ زیرا یال‌های $4/3$ فقط بین یکی از سه جهت مثبت و v_7 ، یا یکی از سه جهت منفی و v_8 رخ می‌دهند و یک مسیر ساده در درخت نمی‌تواند نقطه قطری واحد را دوبار استفاده کند. بنابراین یکی از سه یال بعدی وزن حداقل ۲ دارد. پس طول یک مسیر ریشه تا برگ حداقل

$$1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 2 = 5 + \frac{2}{3}$$

□

است.

2.3 پوشش ۱۸ ناحیه‌ای و کران ۱۰

در گام بعدی، گوی واحد با ۱۸ گوی ℓ_1 با شعاع $1/2$ پوشانده می‌شود. مجموعه مراکز را به صورت

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{array}{l} (\pm \frac{1}{6}, 0, 0), (0, \pm \frac{1}{6}, 0), (0, 0, \pm \frac{1}{6}), \\ (\pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{6}, 0), (\pm \frac{1}{6}, 0, \pm \frac{1}{6}), (0, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{6}) \end{array} \right\}$$

تعریف می‌کنیم؛ علامت‌ها مستقل انتخاب می‌شوند و در مجموع $18 = 4 + 4 + 4 + 6$ مرکز به دست می‌آید.

لم 2.4 (پوشش ۱۸ تایی). داریم

$$B_1(0, 1) \subseteq \bigcup_{c \in \mathcal{C}} B_1(c, 1/2).$$

اثبات. به دلیل تقارن، کافی است نقطه $x = (a, b, c)$ را در ناحیه $0 \leq c \leq b \leq a$ و $a + b + c \leq 1$ بررسی کنیم. اگر $a \geq 1/2$ ، مرکز $u = (1/2, 0, 0)$ مناسب است و

$$\|x - u\|_1 = a - \frac{1}{2} + b + c \leq \frac{1}{2}.$$

اگر $a < 1/2$ ، مرکز $v = (1/4, 1/4, 0)$ را می‌گیریم. سه حالت داریم. اگر $a, b \geq 1/4$ ،

$$\|x - v\|_1 = a + b + c - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

اگر $a \geq 1/4$ و $b < 1/4$,

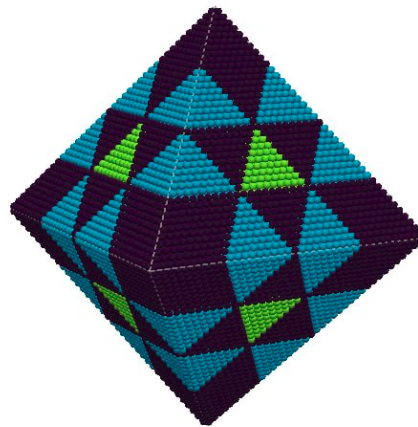
$$\|x - v\|_1 = a - b + c \leq a < \frac{1}{2}$$

چون $b \geq c$. اگر $a < 1/4$ ، آنگاه $b < 1/4$ و

$$\|x - v\|_1 = \frac{1}{2} - a - b + c \leq \frac{1}{2}.$$

□

با جایگشت مختصات و تغییر علامت‌ها، همه نقاط گوی پوشانده می‌شوند.



شکل 2.1: پوشش ۱۸ ناحیه‌ای گوی واحد ℓ_1 با گوی‌های شعاع $1/2$ ، مطابق شکل تولیدشده در مقاله CCCG 2026. رنگ هر خانه تعداد پوشش‌های هم‌پوشان را نشان می‌دهد و مرز هشت‌وجهی، هندسه واقعی مسئله را حفظ می‌کند.

اگر $n \geq 158$ باشد، اصل لانه کیوتری نشان می‌دهد یکی از ۱۸ ناحیه دست‌کم

$$\left\lceil \frac{158}{18} \right\rceil = 9$$

ربات دارد. ربات اولیه در حداکثر ۱ واحد زمان وارد این ناحیه می‌شود و یک ربات را فعال می‌کند. قطر هر ناحیه شعاع $1/2$ برابر ۱ است؛ بنابراین با دو دور دوبرابر شدن، تعداد ربات‌های فعال در آن ناحیه به ۸ می‌رسد. زمان این فاز برابر

$$1 + 2 + 1 = 4$$

است؛ جمله آخر، بازگشت ربات‌های فعال به مبدأ با هزینه حداکثر ۱ است.

لم 2.5 (بیدارسازی هرمی). فرض کنید یک ناحیه هرمی با ارتفاع h روی پایه‌ای با شعاع ℓ_1 برابر x قرار دارد و یک ربات فعال از مرکز پایه شروع می‌کند. کل ناحیه در زمان

$$f(x, h) \leq 9x + h$$

پاک می‌شود.

اثبات. حرکت عمودی در بدترین حالت h هزینه دارد. برای حرکت جانبی، نخستین برخورد از محور مرکزی تا پایه حداکثر x زمان می‌خواهد. سپس دو ربات فعال می‌توانند در زمان $2x$ دو ربات دیگر را فعال کنند. با چهار ربات فعال، پایه به چهار زیرپایه با شعاع $x/2$ تقسیم می‌شود و رفتن به مراکز آن‌ها حداکثر $1/5x$ هزینه دارد. بنابراین

$$f_{\text{lat}}(x) \leq x + 2x + 1/5x + f_{\text{lat}}(x/2) = 4/5x + f_{\text{lat}}(x/2).$$

باز کردن بازگشت می‌دهد

$$f_{\text{lat}}(x) \leq 4/5x \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = 9x.$$

در متریک ℓ_1 هزینه‌های عمودی و جانبی جمع‌پذیرند؛ پس $f(x, h) \leq 9x + h$. $\square$

اکنون ۸ ربات فعال به چهار پایه شعاع $x = 1/2$ فرستاده می‌شوند؛ دو ربات برای هر پایه، یکی برای نیم‌فضای بالا و یکی برای نیم‌فضای پایین. انتقال به مرکز پایه‌ها $0/5$ زمان می‌خواهد و لم هر می با $h = 1$ و $x = 1/2$ زمان

$$9(1/2) + 1 = 5/5$$

می‌دهد. بنابراین فاز کلی برای $n \geq 158$ برابر است با

$$4 + 0/5 + 5/5 = 10.$$

2.4 حالت پایه و شبیه‌سازی Erdős-Szekeres

برای $n \leq 157$ از ترکیب درخت دودویی پایه و زنجیره‌های یکنواخت استفاده شد. اگر S_1, S_2, S_3 در هر سه مختصه یکنواخت باشند، آنگاه

$$\|S_1 - S_3\|_1 = \|S_1 - S_2\|_1 + \|S_2 - S_3\|_1.$$

از آنجا که قطر $B_1(0, 1)$ برابر ۲ است، مجموع طول دو یال در یک زنجیره سه‌تایی حداکثر ۲ است؛ پس یکی از دو انتها یالی با طول حداکثر ۱ دارد و می‌تواند به عنوان شروع سریع زنجیره استفاده شود.

قضیه Erdős-Szekeres تضمین می‌کند برای استخراج یک زنجیره سه‌بعدی با طول ۴، وجود ۸۲ نقطه کافی است، و برای طول ۳، وجود ۱۷ نقطه کافی است. بنابراین در هر مرحله از شبیه‌سازی، تعداد زنجیره‌های تضمین‌شده به صورت زیر محاسبه شد:

$$P_4 = \max\left(0, \left\lfloor \frac{N - 78}{4} \right\rfloor\right), \quad P_3 = \max\left(0, \left\lfloor \frac{N - 4P_4 - 14}{3} \right\rfloor\right).$$

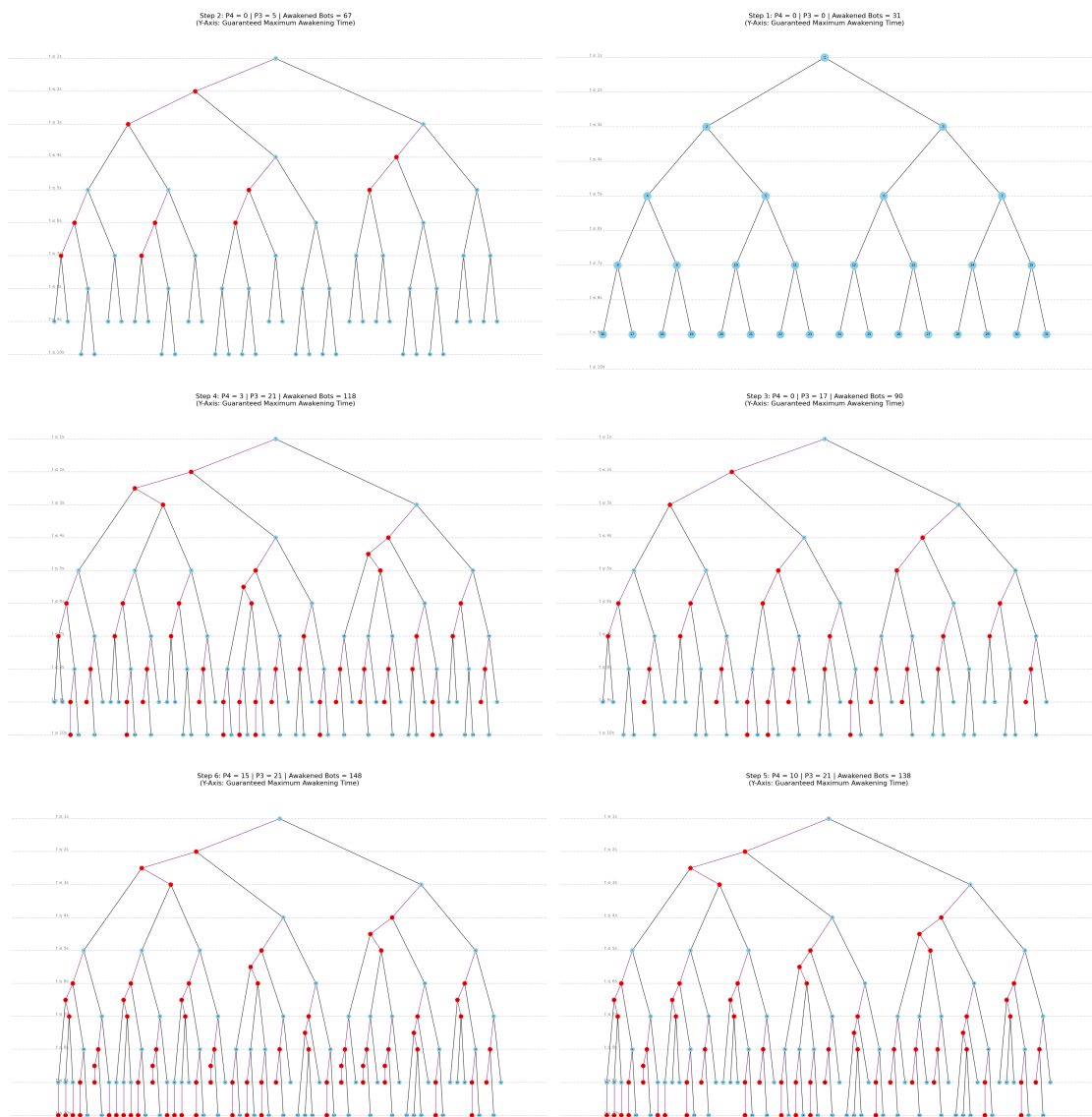
Algorithm 1 Priority-queue simulation for the base case

Input: time_limit=10, max_p4, max_p3

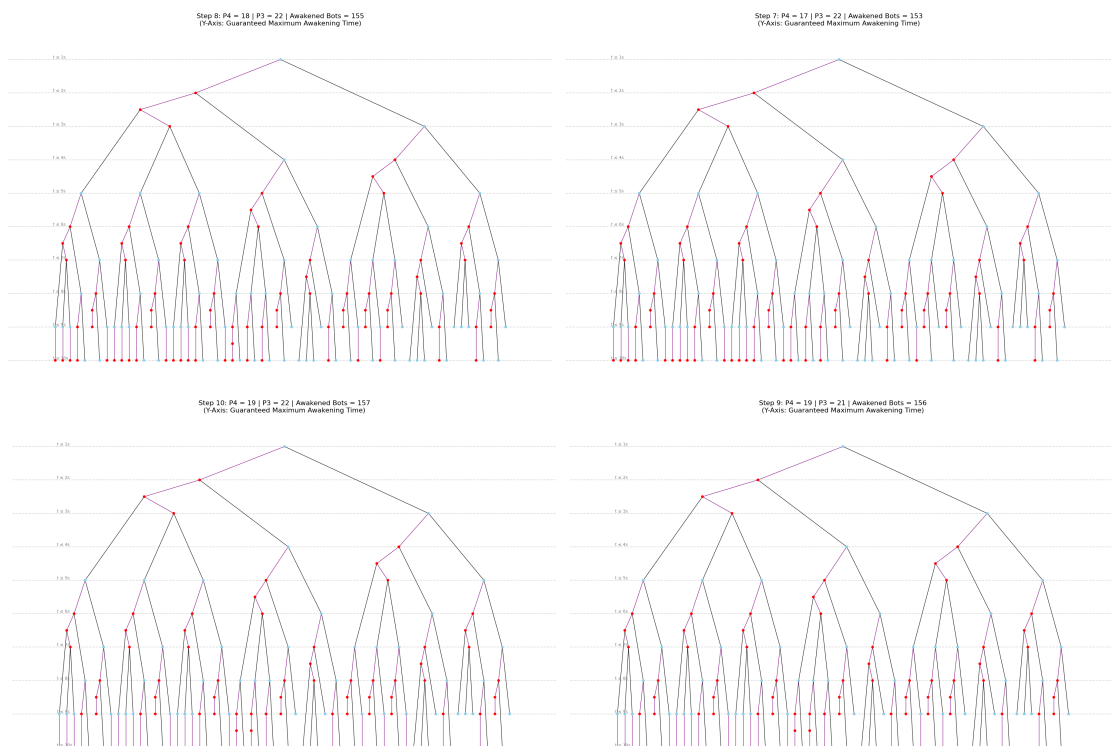
Output: an awakening tree and the number of activated robots

```
1: PQ  $\leftarrow$  a min-priority queue containing (1.0, 1)
2: activated  $\leftarrow$  1
3: while PQ is not empty do
4:    $(d, b) \leftarrow \text{EXTRACTMIN}(\text{PQ})$ 
5:   if  $d > 10$  or  $b$  is already processed then
6:     continue
7:   end if
8:   if max_p4 > 0 and  $d + 1 \leq 10$  and  $b$  is not locked then
9:     attach a monotone  $P_4$  chain to the left child of  $b$ 
10:    push the second robot at time  $d + 1$ 
11:    push the remaining two robots at times at most  $d + 2$ 
12:    max_p4  $\leftarrow$  max_p4 - 1
13:  else if max_p3 > 0 and  $d + 1 \leq 10$  and  $b$  is free then
14:    attach a monotone  $P_3$  chain to  $b$ 
15:    push the new chain robots at times  $d + 1$  and  $d + 2$ 
16:    max_p3  $\leftarrow$  max_p3 - 1
17:  end if
18:  if the left child of  $b$  is empty and  $d + 2 \leq 10$  then
19:    create a new robot at time  $d + 2$ 
20:  end if
21:  if the right child of  $b$  is empty and  $d + 2 \leq 10$  then
22:    create a new robot at time  $d + 2$ 
23:  end if
24: end while
```

در این منطق، اگر رباتی در زمان d در ابتدای یال کوتاه زنجیره قرار گیرد، فعال‌سازی بعدی دقیقاً تا زمان $d + 1$ انجام می‌شود. یال‌های بعدی زنجیره طوری زمان‌بندی می‌شوند که کل مسیر یکنواخت از سقف $d + 2$ عبور نکند. شکل‌های زیر خروجی مستقیم Matplotlib از شبیه‌ساز را نشان می‌دهند.



شکل 2.2: گام‌های ۱ تا ۶ شبیه‌سازی حالت پایه. یال‌های کوتاه حاصل از زنجیره‌های یکنواخت به رشد سریع‌تر درخت کمک می‌کنند.



شکل 2.3: گام‌های ۷ تا ۱۰ و همگرایی شبیه‌سازی روی ۱۵۷ ربات فعال‌شده در بازه زمانی ۱۰.

قضیه 2.6. در $(\mathbb{R}^3, \ell_1)$ ، هر مجموعه متناهی از ربات‌ها در گوی واحد را می‌توان در زمان حداکثر ۱۰ فعال کرد.

اثبات. اگر $n \leq 157$ ، الگوریتم حالت پایه و شبیه‌سازی زمان‌بندی‌شده بالا یک درخت با Makespan حداکثر ۱۰ می‌سازد. اگر $n \geq 158$ ، پوشش ۱۸ ناحیه‌ای، تولید تیم فعال ۸ تایی، و لم هر می زمان کل ۱۰ را نتیجه می‌دهد. $\square$

فصل 3

فضای اقلیدسی و نگاشت سطحی

3.1 تقسیم‌بندی مثلثی و کران ۱۲/۷۶۰۱

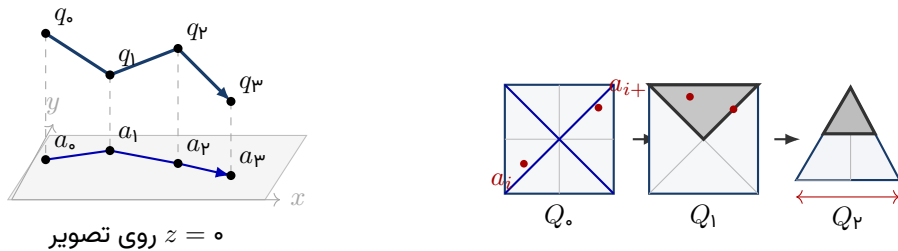
در $(\mathbb{R}^3, \ell_2)$ ، راهبرد بر تصویر کردن مسیرهای ریشه تا برگ روی صفحه $z = 0$ و کنترل جداگانه حرکت عمودی و افقی است. برای مسیر دلخواه

$$p_0 = q_0, q_1, \dots, q_m$$

داریم

$$\sum_{i=0}^{m-1} \|q_{i+1} - q_i\|_2 \leq \sum_{i=0}^{m-1} \|a_{i+1} - a_i\|_2 + \sum_{i=0}^{m-1} |z_{i+1} - z_i|,$$

که $a_i = (x_i, y_i)$ تصویر q_i روی صفحه است. در راهبرد مورد استفاده، مجموع حرکت عمودی حداکثر ۱ است.



شکل 3.1: در کران اقلیدسی سه‌بعدی، طول مسیر به حرکت عمودی و طول مسیر تصویرشده روی صفحه جدا می‌شود. سپس تصویر افقی با تقسیم‌های متناوب مثلثی کنترل می‌شود و قطر ناحیه‌ها سری هندسی فصل را می‌سازد.

بخش افقی با تقسیم متناوب مربع محیطی و مثلث‌های حاصل کنترل می‌شود. برای دو یال دوم مسیر، اگر $\alpha = \angle a_1 a_2 a_3$ باشد، بدترین حالت روی مرز مربع رخ می‌دهد و

$$\|a_1 - a_2\|_2 + \|a_2 - a_3\|_2 = 2 \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{3\pi - 2\alpha}{4}.$$

بیشینه در $\alpha = 3\pi/4$ به دست می‌آید؛ پس

$$\|a_1 - a_2\|_2 + \|a_2 - a_3\|_2 \leq 4 \sin \frac{3\pi}{8}.$$

برای $i \geq 3$ قطر ناحیه‌ای که a_i و a_{i+1} در آن قرار دارند، به صورت زیر کران می‌شود:

$$\|a_i - a_{i+1}\|_2 \leq \begin{cases} 2^{(2-i)/2} \sqrt{5} & i \text{ زوج}, \\ 2^{(3-i)/2} \sqrt{2} & i \text{ فرد}. \end{cases}$$

بنابراین

$$\sum_{i=3}^{m-1} \|a_i - a_{i+1}\|_2 \leq \sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \dots = 2\sqrt{2} + \sqrt{5}.$$

در گام نهایی، ربات‌های نیمه بالایی هرکدام حداکثر یک ربات در نیمه پایینی را فعال می‌کنند و این کار حداکثر ۲ زمان می‌خواهد. در نتیجه

$$1 + 1 + 4 \sin \frac{3\pi}{8} + 2\sqrt{2} + \sqrt{5} + 2 \leq 12.7601.$$

قضیه 3.1. نسبت بیدارسازی در $(\mathbb{R}^3, \ell_2)$ حداکثر 12.7601 است.

3.2 نگاشت نیم‌کره به دیسک

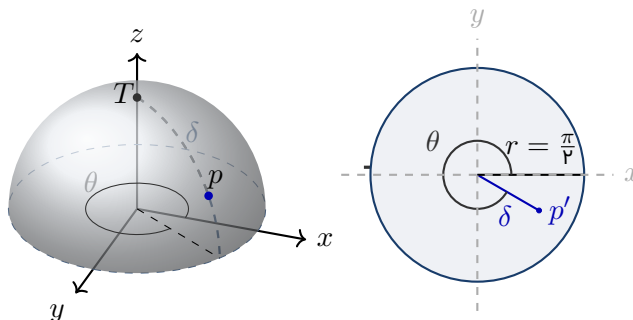
نیم‌کره بالایی را با قطب $T = (0, 0, 1)$ در نظر بگیرید. هر نقطه $p = (x, y, z)$ روی نیم‌کره با زوج (δ, θ) نمایش داده می‌شود، که

$$\delta = \arccos(z), \quad \theta = \arg(x + iy).$$

نگاشت

$$\mathcal{M}(p) = p' = (\delta, \theta)$$

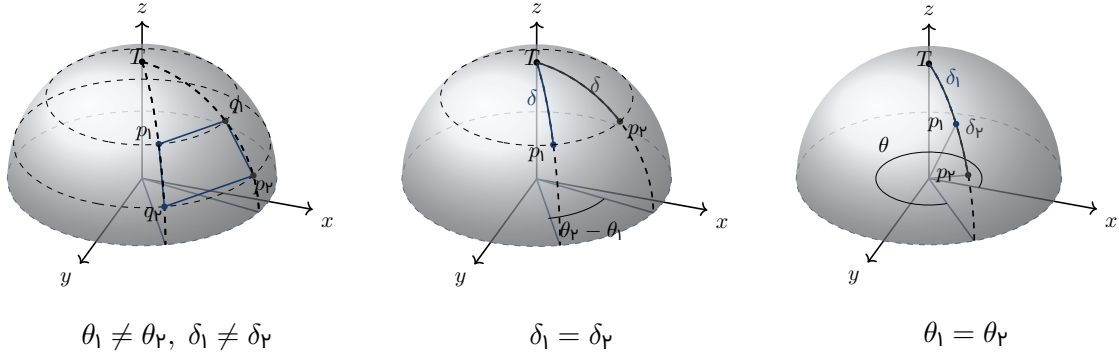
نقطه را به دیسک اقلیدسی شعاع $\pi/2$ با مختصات قطبی می‌برد.



شکل 3.2: نگاشت شعاعی-زاویه‌ای نیم‌کره به دیسک، بر اساس شکل مقاله. مؤلفه ژئودزیک از قطب، شعاع دیسک را تعیین می‌کند و زاویه تصویر روی صفحه استوایی، زاویه قطبی تصویر را می‌سازد.

لم 3.2. برای هر دو نقطه p_1, p_2 روی یک نیم کره،

$$\|p_1 - p_2\|_2 \leq \|\mathcal{M}(p_1) - \mathcal{M}(p_2)\|_2.$$



شکل 3.3: سه حالت هندسی در اثبات نامساوی نگاشت، با استفاده از شکل‌های سه بعدی مقاله: نصف النهار مشترک، عرض جغرافیایی مشترک، و حالت عمومی که با چهار نقطه کمکی به دوزنقه‌ای روی سطح کاهش می‌یابد.

اثبات. اگر $\theta_1 = \theta_2$ ، آنگاه

$$\|p_1 - p_2\|_2 = r \sin \frac{|\delta_1 - \delta_2|}{r} \leq |\delta_1 - \delta_2| = \|p'_1 - p'_2\|_2.$$

اگر $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ، شعاع دایره افقی برابر $\sin \delta$ است و

$$\|p_1 - p_2\|_2 = r \sin \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{r} \sin \delta \leq r \sin \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{r} \delta = \|p'_1 - p'_2\|_2.$$

در حالت عمومی، با تعریف $q_2 = (\delta_2, \theta_1)$ و $q_1 = (\delta_1, \theta_2)$ چهار نقطه یک دوزنقه متساوی الساقین روی صفحه مناسب می‌سازند و

$$\|p_1 - p_2\|_2^2 = r^2 \sin^2 \frac{|\delta_1 - \delta_2|}{r} + r^2 \sin \delta_1 \sin \delta_2 \sin^2 \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{r}.$$

از طرف دیگر

$$\|p'_1 - p'_2\|_2^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 - 2\delta_1\delta_2 \cos |\theta_1 - \theta_2|.$$

با $\sin x \leq x$ و $\sin^2(t/2) = 1 - \cos t$ ، جمله اول و دوم سمت چپ به ترتیب با جمله‌های متناظر سمت راست کران می‌شوند. $\square$

3.3 نمونه‌های مرزی و سطحی

اگر همه ربات‌های غیرفعال روی مرز گوی واحد اقلیدسی باشند و ربات اولیه در مبدأ باشد، کره به دو نیم کره تقسیم می‌شود. ربات اولیه در زمان ۱ به نقطه‌ای روی نیم کره پرمجمعیت می‌رسد. پس از نگاشت، مسئله روی دیسک شعاع $\pi/2$ حل می‌شود. با استفاده از کران تاجی

$$\mathcal{R}\left(\frac{\pi}{r}, \pi\right) \leq \pi + \frac{\phi^r}{\phi^w + \pi} < 4.073,$$

نتیجه می‌شود

$$T_{\text{boundary}} \leq \pi + \frac{\pi}{2} \cdot 4.73 < 9.4.$$

برای surface-FTP، فاصله‌ها ژئودزیک هستند. فاصله ژئودزیک دو نقطه با مختصات (δ_1, θ_1) و (δ_2, θ_2) برابر است با

$$2 \arcsin \sqrt{\sin^2 \frac{|\delta_1 - \delta_2|}{2} + \sin \delta_1 \sin \delta_2 \sin^2 \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{2}}.$$

این رابطه در شبیه‌سازی ژئودزیک با شبکه

$$\delta_1 = \frac{\pi}{2} \epsilon i, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{2} \epsilon j, \quad |\theta_1 - \theta_2| = \pi \epsilon k, \quad \epsilon = 0.001$$

اعتبارسنجی شد. با نگاشت هر نیم‌کره به دیسک شعاع $\pi/2$ و استفاده از کران دوبعدی $4/31$ ، برای نیم‌کره بالا

$$T_{\text{upper}} \leq 2\rho_1 + \frac{\pi}{2} \cdot 4.31 \leq 9.92$$

و برای نیم‌کره پایین

$$T_{\text{lower}} \leq \pi - \rho'_1 + \frac{\pi}{2} \cdot 4.31 \leq 9.92$$

به دست می‌آید.

فصل 4

ابعاد بالا

4.1 اثبات $\mathcal{O}(d \log d)$ پوشش $2d$ تایی

در این بخش $C_r = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 \leq r\}$ گوی ℓ_1 شعاع r در بعد d است. کران‌های پیشین برای بعد متغیر از نظر وابستگی به d بسیار بزرگ بودند. ایده اصلی این بخش این است که به جای پوشش شبکه‌ای، از همان هندسه رأس‌های cross-polytope استفاده شود: گوی بزرگ با $2d$ گوی کوچک‌تر پوشانده می‌شود، و فقط به $2d$ منبع فعال برای شروع بازگشت نیاز داریم.

لم 4.1 (پوشش $2d$ تایی). گوی C_r با $2d$ گوی ℓ_1 با شعاع

$$r' = r \frac{d-1}{d}$$

پوشانده می‌شود. مراکز این گوی‌ها نقاط

$$\mathcal{V}_d = \left\{ \pm \frac{r}{d} e_i : i = 1, \dots, d \right\}$$

هستند.

اثبات. یک نقطه دلخواه $p = (p_1, \dots, p_d) \in C_r$ را در نظر بگیرید. مختصه‌ای با بیشترین قدرمطلق را انتخاب کنید:

$$|p_k| = \max_i |p_i|.$$

مرکز متناظر را

$$c_k = \text{sgn}(p_k) \frac{r}{d} e_k$$

می‌گیریم. آنگاه

$$\|p - c_k\|_1 = \left| |p_k| - \frac{r}{d} \right| + \|p\|_1 - |p_k|.$$

اگر $|p_k| \geq r/d$ ، عبارت بالا برابر $\|p\|_1 - r/d$ است و بنابراین

$$\|p - c_k\|_1 \leq r - \frac{r}{d} = r \frac{d-1}{d}.$$

اگر $|p_k| < r/d$ ، از $|p_k| \geq \|p\|_1/d$ داریم

$$\begin{aligned}\|p - c_k\|_1 &= \|p\|_1 - 2|p_k| + \frac{r}{d} \\ &\leq \|p\|_1 \left(1 - \frac{2}{d}\right) + \frac{r}{d} \leq r \frac{d-1}{d}.\end{aligned}$$

پس هر نقطه p در یکی از گوی‌های کوچک قرار دارد. $\square$

لم 4.2 (تولید منابع فعال). یک ربات فعال در مرکز C_r می‌تواند $n-1$ ربات دیگر را در زمان حداکثر

$$r + 2r \left\lceil \log_2 \left(\frac{n}{2} \right) \right\rceil$$

فعال کند.

اثبات. ربات اولیه در زمان حداکثر r اولین ربات غیرفعال را فعال می‌کند. از آن لحظه دو ربات فعال داریم. قطر C_r برابر $2r$ است؛ بنابراین در هر دور، هر ربات فعال می‌تواند در زمان حداکثر $2r$ یک ربات جدید را فعال کند و تعداد ربات‌های فعال دو برابر می‌شود. پس از k دور، تعداد ربات‌های فعال 2^{k+1} است. شرط $2^{k+1} \geq n$ معادل

$$k \geq \log_2(n/2)$$

است، و با گرد کردن به بالا، فرمول لم به دست می‌آید. $\square$

قضیه 4.3. در $(\mathbb{R}^d, \ell_1)$ ، هر نمونه داخل گوی شعاع r با زمان

$$f_d(r) \leq (2d+1 + 2d \lceil \log_2 d \rceil) r$$

حل می‌شود. در نتیجه نسبت بیدارسازی $\mathcal{O}(d \log d)$ است.

اثبات. برای شروع بازگشت به $2d$ ربات فعال نیاز داریم. با لم قبل و $n = 2d$ ، زمان تولید این منابع فعال حداکثر

$$r + 2r \lceil \log_2 d \rceil$$

است. سپس هر ربات به مرکز یکی از $2d$ گوی پوشاننده فرستاده می‌شود. فاصله هر مرکز پوشش از هر نقطه داخل C_r حداکثر

$$r + \frac{r}{d} = r \frac{d+1}{d}$$

است. اگر $f_d(r)$ بدترین زمان برای گوی شعاع r باشد، بازگشت زیر به دست می‌آید:

$$f_d(r) \leq r + 2r \lceil \log_2 d \rceil + r \frac{d+1}{d} + f_d\left(r \frac{d-1}{d}\right).$$

با تعریف

$$C_d = 1 + 2 \lceil \log_2 d \rceil + \frac{d+1}{d}, \quad k = \frac{d-1}{d},$$

این بازگشت به صورت $f_d(r) \leq C_d r + f_d(kr)$ نوشته می‌شود. باز کردن آن می‌دهد

$$f_d(r) \leq C_d r \sum_{i=0}^{\infty} k^i = C_d r \frac{1}{1-k} = C_d r d.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} f_d(r) &\leq \left(1 + 2^{\lceil \log_2 d \rceil} + \frac{d+1}{d}\right) r d \\ &= (2d + 1 + 2^{\lceil \log_2 d \rceil}) r. \end{aligned}$$

□

این مقدار نسبت به d از مرتبه $\mathcal{O}(d \log d)$ است.

4.2 نسخه خطی $\mathcal{O}(d)$

در کار بعدی، پوشش شبکه‌ای بالا با پوشش حجمی تیزتر جایگزین شد. برای هر فضای نرم‌دار d بعدی، عدد پوشش با شعاع $r/2$ را می‌توان با

$$N(B(r), r/2) \leq \left(\frac{2r}{r/2} + 1\right)^d = 5^d$$

کران کرد. بنابراین تعداد دورهای دوبرابر شدن فقط

$$\log_2 5^d = d \log_2 5 = \mathcal{O}(d)$$

است. با همان بازگشت

$$F_d(r) \leq r + F_d(r/2) + 2d(\log_2 5)r$$

استقرار می‌دهد $F_d(1) = \mathcal{O}(d)$. این نسخه از همان معماری بیدارسازی و پوشش استفاده می‌کند، اما پوشش هندسی بهینه‌تری جایگزین پوشش شبکه‌ای می‌شود.

4.3 کران پایین اقلیدسی در ابعاد بالا

برای $(\mathbb{R}^k, \ell_2)$ ، نقاط رئوس ابرمکعب نرمال‌شده را در نظر بگیرید:

$$x_i \in \left\{ -\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

هر یک از 2^k نقطه روی کره واحد قرار دارد. فاصله هر دو رأس متمایز حداقل

$$\frac{2}{\sqrt{k}}$$

است. برای فعال کردن 2^k ربات، درخت بیدارسازی باید مسیری با دست‌کم $k+1$ یال داشته باشد. یال اول از مبدأ به کره واحد وزن ۱ دارد و هر یال بعدی حداقل $2/\sqrt{k}$ است. پس

$$T \geq 1 + k \cdot \frac{2}{\sqrt{k}} = 1 + 2\sqrt{k}.$$

فصل 5

جمع‌بندی

در این گزارش، کران‌های اصلی مسئله Freeze-Tag در چند هندسه بررسی شد. در $(\mathbb{R}^3, \ell_1)$ ، کران پایین $5 + 2/3$ و کران بالای ۱۰ با ترکیب پوشش ۱۸ ناحیه‌ای، لم هرمی، و شبیه‌سازی حالت پایه به دست آمد. در $(\mathbb{R}^3, \ell_2)$ ، تقسیم‌بندی مثلثی و تحلیل سری‌های هندسی، کران $12/7601$ را نتیجه داد. برای نمونه‌های مرزی و سطحی، نگاشت نیم‌کره به دیسک دوبعدی ابزار اصلی بود. در ابعاد بالا نیز استقرای پوششی، ابتدا کران $O(d \log d)$ و سپس با پوشش تیزتر کران $O(d)$ را فراهم کرد.

مسیرهای باز اصلی شامل کاهش فاصله میان کران پایین $5 + 2/3$ و کران بالای ۱۰ در فضای منهتنی سه‌بعدی، اثبات تحلیلی کامل‌تر برای نامساوی ژئودزیک در نسخه سطحی، و بررسی تعمیم نگاشت‌های سطحی به ابعاد بالاتر است.

Bibliography

- [1] E. M. Arkin, M. A. Bender, S. P. Fekete, J. S. B. Mitchell, and M. Skutella. The Freeze-Tag Problem: How to Wake Up a Swarm of Robots. *Algorithmica*, 46:193–221, 2006. DOI: 10.1007/s00453-006-1206-1.
- [2] S. Alipour, K. Baghestani, M. Mirzaei, and S. Sahraei. Geometric Freeze-Tag Problem. *Proceedings of the 24th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*, pp. 87–95, 2025.
- [3] S. Alipour, A. Ahadi, K. Baghestani, S. Sahraei, and M. Mirzaei. Geometric Freeze-Tag Problem. *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, 40(1):11, 2026. DOI: 10.1007/s10458-026-09738-8.
- [4] N. Bonichon, A. Casteigts, C. Gavoille, and N. Hanusse. Freeze-Tag in L_1 Has Wake-Up Time Five with Linear Complexity. *DISC 2024, LIPIcs 319*, 9:1–9:16. DOI: 10.4230/LIPIcs.DISC.2024.9.
- [5] L. L. C. Pedrosa and L. de Oliveira Silva. Freeze-Tag is NP-hard in 3D with L_1 distance. *Procedia Computer Science*, 223:360–366, 2023.
- [6] Z. Abel, H. A. Akitaya, and J. Yu. Freeze Tag Awakening in 2D is NP-hard. *27th Fall Workshop on Computational Geometry*, 2017.